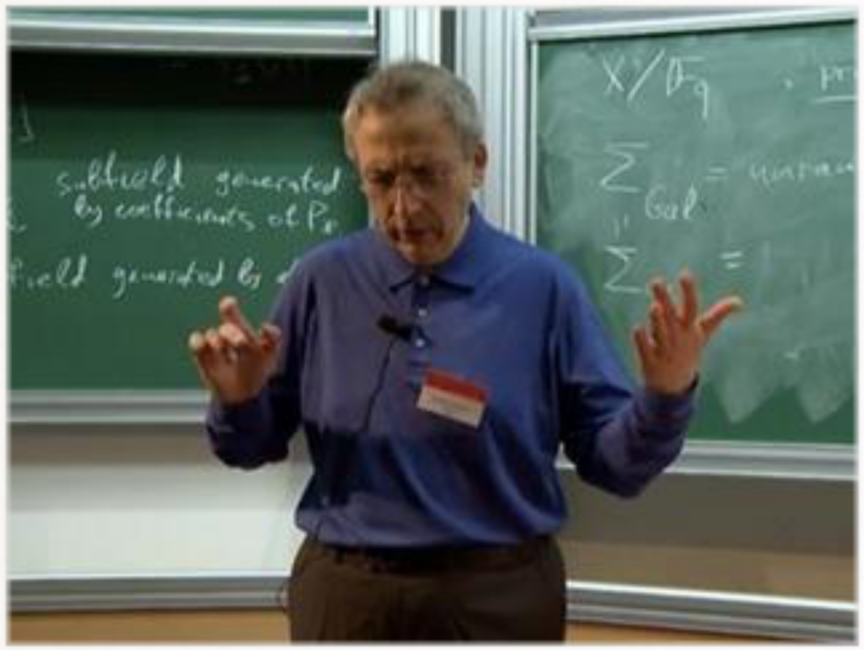
Sobre grupos cuánticos y sus subgrupos

Gastón Andrés García
UNLP - CONICET

ICAS - UNSAM
10 de mayo de 2016

¿Qué es un grupo cuántico?



V. Drinfeld

ICM 1986 Berkeley

Dio una definición basándose en ideas de QISM (quantum inverse scattering method)

Ideas: Mirar el álg. de observables

cuantización

Mecánica Clásica	Mecánica Cuántica
M variedad	$\mathcal{H}$ espacio de Hilbert
puntos = estados	estados = subesp 1-dim
funciones s/M = observables	observables = func. s/$\mathcal{H}$
↳ Álgebra conmutativa	↳ Álgebra no conm.

Espacios $\qquad$ Funtor $\qquad$ Funciones (Alg conmut)

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Fun}(X) = \mathcal{O}(X)$$

(top. compacto, esquema afín, Variedad alg)

$$\alpha : X \to \mathbb{C}$$

(continuas, regulares)

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{{}^t f} \mathcal{O}(X)$$

$${}^t f(\alpha)(x) = \alpha(f(x))$$

$$\mathrm{Spec}\, A \leftsquigarrow A$$

Supongamos $X = G$ es un grupo (top, diff ~ Lie, algebraico)

$$G \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\mathcal{O}}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}(G)$$

$$G \times G \xrightarrow{m} G \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(G \times G) = \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$$

$$\{1\} \xrightarrow{u} G \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\mathcal{O}(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}}_{(\mathcal{O}(G), \Delta, \varepsilon) \text{ es una coálgebra}}$$

$$G \xrightarrow{(-)^{-1}} G \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{O}(G) \xrightarrow{S} \mathcal{O}(G)$$

$\mathcal{O}(G)$ es un álgebra conmutativa

junto con
$\left\{\begin{array}{l}\Delta = \text{comultiplicación} \\ \varepsilon = \text{counidad}\end{array}\right.$

Biálgebra

S = antípoda

es un Álgebra de Hopf

Definición (Drinfeld)

La categoría de espacios cuánticos es la categoría dual a la categoría de álgebras de Hopf

Grupos (loc. comp, álg) $\xleftrightarrow{\text{Thm}}$ Álg. de Hopf conmutativas

$G \longrightarrow \mathcal{O}(G)$

$\operatorname{Spec} A \longleftarrow A$

Grupos cuánticos (loc. comp., álg) $\rightsquigarrow$ Álg de Hopf no conmutativas ni coconmutativas

$G_q \qquad \mathcal{O}_q(G)$

QISM: Construir álg. de Hopf no conmutativas ni cocom.

Modelo de vértices sobre $V=\mathbb{C}^n$

Es exactamente soluble si existe

$R \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ que satisface

$$\boxed{R_{12}(\lambda)R_{13}(\lambda')R_{23}(\lambda'')=R_{23}(\lambda)R_{13}(\lambda')R_{12}(\lambda)}$$

$\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$

QYBE: Quantum Yang-Baxter Equation.

Dada una solución se construye una familia infinita de operadores

$$T(\lambda) \in \mathrm{End}(V^N), \; \lambda \in \mathbb{C}$$

que satisfacen

$$\boxed{R(\lambda)\, T(\lambda')\, T(\lambda'') = T(\lambda'')\, T(\lambda')\, R(\lambda)}$$

Obs: los distintos tipos de operadores así encontrados son representaciones de una álgebra asociada a una sol. de QYBE

Esto lleva a estudiar el álgebra

$$A(R) = \mathbb{C}\langle t(\lambda)^i_j,\ \lambda \in \mathbb{C} \mid$$

$$R(\lambda)_{12} t_1(\lambda') t_2(\lambda'') = t_2(\lambda'') t_1(\lambda') R(\lambda)_{12}$$

$$\lambda' = \lambda + \lambda'',\ t_1 = t \otimes 1,\ t_2 = 1 \otimes t \rangle$$

Algebrización de la construcción

$V = \mathbb{C}^n$, $R \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$

$A(R)$ generada por t^i_j, $1 \leq i, j \leq n$

tal que

$$\boxed{R t_1 t_2 = t_2 t_1 R}$$

<u>Obs</u>: Es una coálgebra con

$$\Delta(t^i_j) = \sum_{l=1}^{n} t^i_l \otimes t^l_j \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$$

$$\varepsilon(t^i_j) = \delta_{ij}$$

Más aún, es una **Biálgebra**

Ejemplos 1) $V = \mathbb{C}^2$, $q \neq 0$, $q \in \mathbb{C}$

$$R = q^{1/2} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A(R) = \mathbb{C}\langle a, b, c, d \mid$

$ac = q^{-1} ca$, $bd = q^{-1} bd$, $ab = q^{-1} ba$

$cd = q^{-1} dc$, $bc = cb$, $ad - da = (q^{-1} - q) bc \rangle$

$= \mathcal{O}_q(M_2) = M_q(2)$

Obs: - Si $q=1$, $\mathcal{O}_1(M_2) = \mathcal{O}(M_2(\mathbb{C}))$

- Vale que

$$\det_q = ad - q^{-1}bc$$

es un elemento de tipo grupo:

$$\Delta(\det_q) = \det_q \otimes \det_q ,$$

es central y

$$SL_2(q) = \mathcal{O}_q(SL_2) = \mathcal{O}_q(M_2) \big/ (\det_q - 1)$$

es un álg de Hopf

2) $SL_q(n)$ se define análogamente [13]

con

$$R = q^{1/n}\Big(q\sum_{i=1}^{n} E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj}$$

$$+ (q-q^{-1})\sum_{j>i} E_{ij}\otimes E_{ji} \Big)$$

$\{E_{ij}\}$ base usual de $M_n(\mathbb{C})$

$$SL_q(n) = \mathcal{O}_q(SL(n)) = \mathcal{O}_q(M_n(\mathbb{C}))/(\det_q - 1)$$

$$\det_q = \sum_{\sigma\in S_n} (-q)^{\ell(\sigma)}\, t^1_{\sigma(1)}\cdots t^n_{\sigma(n)}$$

3) $GL_q(n) = \mathcal{O}_q(M(n))[\det_q^{-1}]$

4) Multiparámetros $n=2$

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qp^{-1} & q-p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad p \in \mathbb{C}^\times$$

define $\mathcal{O}_{p,q}(GL(2)) = GL_{p,q}(2)$

Preguntas / Problemas

a) Dar una definición axiomática de grupos cuánticos ($\exists$ para loc. compactos, álg env.)

b) Si H es un álg. de Hopf arbitraria ¿$\exists$ G_q grupo cuántico tal que $\mathcal{O}_q(G) \hookrightarrow H$?

c) Entender $\mathcal{O}_q(G)$ como objeto algebraico.

Subgrupos cuánticos

clásico

Grupos

G

$\uparrow$

Γ

$\xrightarrow{\mathcal{O}}$

$\xleftarrow[\mathrm{Spec}]{}$

Álgebras de Hopf conm.

$\mathcal{O}(G)$

$\downarrow$

$\mathcal{O}(\Gamma)$

cuántico

Grupos cuánticos

G_q

$\uparrow$

Γ_q

$\overset{?}{\longleftrightarrow}$

Álg. de Hopf noconmut.

$\mathcal{O}_q(G)$

$\downarrow$

A

Definición: Sea G_q un grupo cuántico. Un subgrupo cuántico de G_q es un cociente A del álg. de Hopf $\mathcal{O}_q(G)$

$$\mathcal{O}_q \xrightarrow{\pi} A$$

Problemas

A.) Fijado G_q, ¿Quiénes son los subgrupos cuánticos de G_q? (El problema clásico sigue abierto)

B) Si A es un álg. de Hopf arbitraria ¿Qué condiciones debe cumplir para ser un subgrupo cuántico?

Historia sobre A)

- Podleś clasificó los subgrupos cuánticos de $SU_q(2)$, $SU_q(3)$ (C^*-álg de Woronowicz)

- Müller clasificó los subgrupos cuánticos de $SL_q(n)$, $GL_q(n)$

- Consideremos G un grupo algebraico afín simple, conexo y simplemente conexo

Sup que tomamos q raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad

Teorema

a) $\mathcal{O}(G) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(G)$ es central

b) $\mathcal{O}_q(G)$ es libre sobre $\mathcal{O}(G)$ de rango $\ell^{\dim G}$

c) se tiene la sucesión exacta

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_q(G) \longrightarrow u_q(\mathfrak{g})^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

Aquí $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ simple

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ raíces simples

$U_q(\mathfrak{g})$ es el álgebra generada por K_{α_i}, E_i, F_i + relaciones

$u_q(\mathfrak{g})$ = Núcleo de Frobenius-Lusztig

dado $U_q(\mathfrak{g}) / (K_{\alpha_i}^{\ell} - 1, E_i^{\ell}, F_i^{\ell})$

- $\dim u_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim G}$

Sup que $\mathcal{O}_q(G) \xrightarrow{\pi} A$ es un cociente de álgebras de Hopf

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(G) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{O}_q(G) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & U_q(\mathfrak{g})^* \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook] & A \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

<u>Vale que</u>

- $B = \pi(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(\Gamma)$, $\Gamma \overset{\sigma}{\hookrightarrow} G$
- $H^* \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow (\Sigma, I_+, I_-)$

donde

- Σ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_\ell)^{\dim G}$
- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$

Teorema (Andruskiewitsch - G)

Existe una biyección entre cocientes $\mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow A$ y G-uplas $(\Sigma, I_+, I_-, \sigma, \Gamma, \delta)$ con $\delta : N \to \hat{\Gamma}$, N grupo asoc. a Σ

El teorema ayuda a comprender la estructura interna de las álg. de Hopf que son cocientes ⇝ problema clasificación

Más recientemente, se obtuvo la clasificación de los subgrupos cuánticos

- $GL_{\alpha,\beta}(n)$ [G, 2010]
- G_q^{φ} grupos cuánticos torcidos [G.-Gutiérrez 2015]

Sobre B)

Teorema [Stefan '99]

Sea H un álg. de Hopf generada por una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda.

Entonces $\mathcal{O}_q(SL(2)) \twoheadrightarrow H$

¡Gracias Totales!