Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.

John von Neumann ∼1950

1. Utilizando el álgebra de matrices gamma $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, y recordando que $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ y $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, pruebe las siguientes identidades útiles:
   - *a*) $\mathrm{Tr}\gamma^\mu = 0$
   - *b*) $(\gamma^5)^2 = 1$
   - *c*) $\mathrm{Tr}\gamma^5 = 0$
   - *d*) $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$
   - *e*) $\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2...\not{p}_n) = 0$, si n es impar
   - *f*) $\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2...\not{p}_n) = p_1\cdot p_2\mathrm{Tr}(\not{p}_3\not{p}_4...\not{p}_n) - p_1\cdot p_3\mathrm{Tr}(\not{p}_2\not{p}_4...\not{p}_n) + ... + p_1\cdot p_n\mathrm{Tr}(\not{p}_2\not{p}_3...\not{p}_{n-1})$, si n es par
   - *g*) Utilizando la relacion anterior, $\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4) = 4\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) - (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right]$
   - *h*) $\mathrm{Tr}(\gamma^5\not{p}_1\not{p}_2) = 0$
   - *i*) $\mathrm{Tr}(\gamma^5\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p_1^\mu p_2^\nu p_3^\rho p_4^\sigma$
   - *j*) $\gamma_\mu\not{p}\gamma^\mu = -2\not{p}$
   - *k*) $\gamma_\mu\not{p}_1\not{p}_2\gamma^\mu = 4p_1\cdot p_2$
   - *l*) $\gamma_\mu\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\gamma^\mu = -2\not{p}_3\not{p}_2\not{p}_1$

2. Las soluciones de la ecuación de Dirac de energía positiva y negativa (i.e. de partícula y antipartícula) u y v

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}, s) = 0 \tag{1}$$
$$(\not{p} + m)v(\vec{p}, s) = 0, \tag{2}$$

pueden ser escritas en la representación quiral, o de Weyl $\left(\text{i.e.}\ \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}\right)$ de la siguiente forma:

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde $s = 1, 2$ es el número cuántico de spin, $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$, y ξ^s una base ortonormal de espinores $(\xi^r)^\dagger \cdot \xi^s = \delta^{rs}$ (e.g. $(1, 0)$ y $(0, 1)$). Usando esta solución, pruebe las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$u^r(\vec{p})^\dagger \cdot u^s(\vec{p}) = 2p_0\delta^{rs} \tag{4}$$
$$\bar{u}^r(\vec{p}) \cdot u^s(\vec{p}) = 2m\delta^{rs} \tag{5}$$
$$v^r(\vec{p})^\dagger \cdot v^s(\vec{p}) = 2p_0\delta^{rs} \tag{6}$$
$$\bar{v}^r(\vec{p}) \cdot v^s(\vec{p}) = -2m\delta^{rs} \tag{7}$$
$$\bar{u}^s(\vec{p}) \cdot v^r(\vec{p}) = 0 \tag{8}$$
$$u^s(\vec{p})^\dagger \cdot v^r(-\vec{p}) = 0 \tag{9}$$

y las siguientes relaciones de completitud

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(\vec{p})\bar{u}^s(\vec{p}) = \not{p} + m \tag{10}$$
$$\sum_{s=1}^{2} v^s(\vec{p})\bar{v}^s(\vec{p}) = \not{p} - m \tag{11}$$

3. En la representación quiral del ejercicio anterior, la matriz de helicidad se escribe como $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Teniendo esto en cuenta, considere un electrón con momento en la dirección z y spin up. Analice la proyección de este estado sobre la base quiral (autoestados de γ^5), como función del momento del electrón. ¿Qué pasa cuando $p >> m$?

> Like the silicon chip of more recent years, the Feynman diagram was bringing computation to the masses.
>
> *Julian Seymour Schwinger - 1982*

4. Calcule el ancho de decaimiento del Z ($Z \to e^- + e^+$). Para ello, dibuje los diagramas pertinentes a orden árbol, escriba la amplitud de scattering correspondiente usando las reglas de Feynman de QED, y con ella calcule la amplitud de decaimiento, integrando sobre todo el espacio de fases del estado final.

5. Rutherford Scattering: Calcule la sección eficaz del proceso $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ no polarizado. Considere el sistema laboratorio (muón en reposo), y una vez obtenido el resultado corrobore que el límite de *no-recoil* ($E_e \ll m_\mu$) reproduce el resultado clásico de Rutherford, y corrobore que la primera corrección relativista es:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(e\, e_p)^2}{4(4\pi)^2} \frac{1}{|\vec{k}|^2 \beta^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)\right), \tag{12}$$
donde $|\vec{k}|$ es el módulo del momento del electrón (entrante o saliente, a este nivel de aproximación es lo mismo), β su velocidad y θ el ángulo que se deflecta.

6. Babha Scattering: Considere el proceso $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$ no polarizado. Considere el sistema centro de masa, y puede despreciar la masa del electrón (límite $E_{CM} \gg m_e$). Analice el comportamiento cuando el ángulo entre el electron entrante y el saliente tiende a cero ($\theta \to 0$).

7. Efecto Compton: Calcule el proceso $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$ no polarizado. Evalúe en el sistema de laboratorio (electrón en reposo), y corrobore que obtiene la fórmula de Klein-Nishina:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right] \tag{13}$$
donde ω y ω' son la energía de los fotones incidente y refractado y θ el ángulo que se desvió el fotón.

8. *Materia ex lux*: Considere el proceso $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$ no polarizado. Escriba la amplitud de scattering. Compare el resultado del módulo cuadrado de la amplitud promediada en polarizaciones, con el obtenido para Compton. Calcule la sección eficaz total como función de s (puede ayudarse con software de manipulación simbólica, tal como *Mathematica*, *Maxima*, etc.).

9. Calcule el ancho de decaimiento del muón, dado por el proceso $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Este es debido a la existencia de corrientes débiles cargadas. Considere que sólo se observa la energía del electrón saliente (E), y que puede despreciar las masas del electrón y los neutrinos. Muestre que la tasa de decaimiento está dada por:
$$\frac{d\Gamma}{dE} = \left(\frac{g_W}{M_W}\right)^4 \frac{1}{2(4\pi)^3} m_\mu^2 E^2 \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu}\right) \Theta(m_\mu/2 - E). \tag{14}$$
Integre la expresión, y obtenga el tiempo de vida media del muón. Compare con el valor experimental.

10. En algunas teorías más allá del Modelo Standard (BSM), se postula la existencia de una partícula vectorial cargada bajo $SU(3)_c$, llamada *axigluon* (A^a_μ). Dada una interacción entre esta y los quarks dada por
$$\mathcal{L} \supset g\bar{\psi}\gamma^\mu A^a_\mu \tau^a \psi. \tag{15}$$
donde $\tau^a = \frac{\lambda^a}{2}$ son los generadores de $SU(3)$, escritos en términos de las matrices de Gell-Mann λ^a, y $a = 1, ..., 8$. Calcule el ancho de decaimiento que presentaría.