The best that most of us can hope to achieve in physics is simply to misunderstand at a deeper level.

Wolfgang Pauli - 1958

1. Muestre que la medida de integración $\frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$ es invariante Lorentz. Luego, muestre que si

$$F(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}} f((\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}, \vec{p}) \cdot x)$$

entonces $F(\Lambda x) = F(x)$ para toda transformación de Lorentz Λ. *Nota: generalmente se suele escribir* $\frac{d^3p}{p^0}$ *para abreviar.*

2. Considere siguiente descomposición de Fourier de un campo escalar real y de su momento canónico conjugado:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right] \tag{1}$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left[a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right]. \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Al cuantizar el sistema, promoverá estos campos a operadores que cumplen las reglas de conmutación usuales.

a) Muestre que las reglas de conmutación para los campos implican

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}\right] = 0, \qquad \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}). \tag{4}$$

b) Tomando el lagrangiano de Klein-Gordon, escriba el hamiltoniano del sistema en términos de los operadores $a\dagger_{\vec{p}}$ y $a\dagger_{\vec{p}}$. Utilice el ordenamiento normal para sustraer la energía del vacío.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{5}$$

(Ayuda: Vea el problema 4 de la guía 1, y tenga en cuenta el 1/2 de diferencia. ¿de donde proviene?).

c) Ahora considere la dependencia temporal, la cual absorbe en las definiciones de los operadores $a_{\vec{p}} \to a_{\vec{p}}(t)$ y $a\dagger_{\vec{p}} \to a^\dagger_{\vec{p}}(t)$. En la representación de Heisenberg, calcule la evolución temporal de los operadores de creación y destrucción, y escriba muestre que los campos se pueden escribir con la dependencia explícita como

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x}\right] \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

3. Olvídese de lo que hizo hasta recién. Ahora en vez de ir de la noción de campo a la de partícula, haremos al revés. Dada una partícula escalar neutra que tiene estados de momento definido $\vec{p}$ dado por $a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$, uno quiere construir un operador de campo que crea partículas en posiciones definidas, para lo cual tomamos la transformada de Fourier del operador de creación. Definimos

$$\phi^+(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\, a_{\vec{p}}\, e^{ip\cdot x} \tag{8}$$

$$\phi^-(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x} = (\phi^+)^\dagger \tag{9}$$

$$\left[\phi^+(x), \phi^+(y)\right]_\mp = 0, \tag{10}$$

$$\left[\phi^+(x), \phi^-(y)\right]_\mp = \Delta_+(x-y) \neq 0, \tag{11}$$

donde el signo en la última ecuación indica si es conmutador (bosones) o anticonmutador(fermiones).

El hamiltoniano será un polinomio de algún orden en el campo, y como debe ser hermítico estará construido tanto por ϕ^+ como por $(\phi^+)^\dagger = \phi^-$. Para que la teoría sea causal, queremos que el hamiltoniano evaluado en dos puntos con separación espacial conmute: $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0$ si $(x-y)^2 < 0$ (en la métrica +—). Esto puede verse arruinado dado que la función $\Delta_+(x) \neq 0$ para x tipo espacio. Proponemos entonces otro campo como elemento fundamental para construir el hamiltoniano:

$$\phi(x) = \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x), \tag{12}$$

con κ y λ números complejos tales que $[\phi(x), \phi(y)]_\mp = \left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right]_\mp = 0$ para todos los x, y con separación espacial.

Calcule cuánto valen κ y λ en orden para que la teoría sea causal, y determine si el campo sigue una estadística bosónica o fermiónica.

4. Repita el problema 2 para el caso de un campo escalar complejo ψ. Para esto, tome como campos independientes a ψ y $\psi^\dagger$ (es decir, con distintos coeficientes en el desarrollo de Fourier) y deduzca las reglas de conmutación para sus operadores de creación y destrucción. Interprete en términos de partículas y antipartículas. El lagrangiano de Klein-Gordon para el campo complejo está en el problema 4 de la guía 1.

5. Repita el problema 3 para encontrar el campo de una partícula que posee una carga q.

   Es decir, si llamamos Q al operador de la carga conservada ($[Q, H] = 0$), entonces proponga campos ϕ^+ creadores de partículas ($[Q, \phi^+(x)] = -q\,\phi^+(x)$), y $\phi^{c\,+}$ creadores de antipartículas (es decir partículas con carga opuesta: $[Q, \phi^{c\,+}(x)] = +q\phi^{c\,+}(x)$). Ahora construya el campo $\psi(x)$ como una combinación lineal de carga definida, de modo que $[Q, \phi(x)] = 0$ y por lo tanto $[Q, H] = 0$ al construir H a partir de ψ.

6. Propagadores:

   Considere una partícula que se encuentra en la posición $\vec{x}$ en un momento t. El estado cuántico de dicho sistema está descripto por $|x\rangle = \psi^\dagger(x)\,|0\rangle$, donde $x = (t, \vec{x})$. Si queremos calcular la probabilidad de encontrar a esa partícula en la posición $\vec{y}$ a un tiempo t', estamos interesados en la proyección $D(x,y) = \langle y|x\rangle = \langle 0|\,\psi(y)\psi^\dagger(x)\,|0\rangle$ donde $y = (t', \vec{y})$. A esta función $D(x,y)$ se denomina *propagador*.

   a) Escriba explícitamente el propagador D de un campo escalar real como una expresión integral en momentos, y muestre que depende de la diferencia de coordenadas $D(x,y) = D(y-x)$. Calcule su valor para dos puntos de separación espacial $(x-y)^2 < 0$ y muestre que es no nulo. ¿Cómo decae con la distancia? (Ayuda: considere dos puntos a igual tiempo, $t = t'$).

   b) Para reconciliar esta idea con la de causalidad, muestre que el conmutador del campo se puede escribir en términos de D como

   $$\left[\psi(x), \psi^\dagger(y)\right] = D(x-y) - D(y-x), \tag{13}$$

   el cual se anula para eventos espacialmente separados. ¿Como interpreta esto en términos de partículas y antipartículas? Note lo que sucede para el caso escalar $\psi(x) = \psi^\dagger(x) = \phi(x)$.

   c) Se define el *propagador de Feynman* Δ_F como el propagador para eventos temporalmente ordenados:

   $$\Delta_F(x-y) = \langle 0|\,T[\psi(x)\psi^\dagger(y)]\,|0\rangle = \begin{cases} D(y-x) & \text{si } x^0 < y^0 \\ D(x-y) & \text{si } x^0 > y^0 \end{cases} \tag{14}$$

   Sabiendo que esto se puede escribir en forma compacta, usando el teorema de Cauchy, como

   $$\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{15}$$

   muestre que esta función es la inversa al operador diferencial de Klein-Gordon, es decir que satisface la ecuación

   $$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\Delta_F(x-y) = -i\delta^4(x-y). \tag{16}$$

   Es decir, Δ_F es la funcion de Green de la ecuación de movimiento del campo.

7. *(opcional)* A continuación, plantearemos un caso no-relativista con el objetivo de recuperar la cuántica usual. Consideremos un campo escalar complejo ψ de masa m que satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_t^2\psi - \nabla^2\psi + m^2\psi = 0. \tag{17}$$

a) Redefinamos el campo con factorizando una dependencia temporal (asociada a su energía en reposo): $\psi(\vec{x},t) = e^{-imt}\tilde{\psi}(\vec{x},t)$. Escriba la ecuación de movimiento para $\tilde{\psi}$. Considere el límite no relativista de la ecuación $|\vec{p}| \ll m$ (o de forma equivalente, $\left|\partial_t^2\tilde{\psi}\right| \ll m\left|\partial_t\tilde{\psi}\right|$). Muestre que obtiene la ecuación de Schrödinger para ψ.
(Nota: Si bien este campo clásico cumple la ecuación de Schrödinger, sigue siendo un campo clásico y no es la funcion de onda que representa un estado cuántico, ni tiene interpretación probabilística alguna. Al cuantizarlo, este será un operador, por lo que no representa un estado como la función de onda.)

b) Sabiendo que el lagrangiano que da lugar a esta ecuación es el presentado en el problema 5 de la guía 1, vemos que el límite no relativista del lagrangiano de Klein-Gordon es el lagrangiano de Schrödinger. A partir de ahora dejaremos de usar la tilde en $\tilde{\psi}$ y lo llamaremos simplemente ψ. Cuantice este campo, promoviendo ψ a operador y a conmutadores los corchetes de Poisson calculados en la guía anterior.

c) A partir de la siguiente descomposición de Fourier

$$\psi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \tag{18}$$

encuentre la relación de conmutación entre $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$, y escriba el Hamiltoniano del sistema en términos de operadores de creación y destrucción.
(Observación: Note que en este lagrangiano no relativista, el campo complejo da lugar a un único tipo de partícula, sin que sea necesario introducir su anti-partícula en el espectro. Esto es una característica de las teorías no-relativistas.)

d) Muestre que el operador de posición y de momento total de un campo se puede escribir como

$$\vec{X} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x}\, \psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{x}) \tag{19}$$

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}^3p\, \vec{p}\, a_{\vec{p}}^\dagger\, a_{\vec{p}}, \tag{20}$$

es decir que se comportan como $\vec{X}\,|\vec{x}\rangle = \vec{x}\,|\vec{x}\rangle$, para $|x\rangle = \psi^\dagger(\vec{x})\,|0\rangle$ y que $\vec{P}\,|\vec{p}\rangle = \vec{p}\,|\vec{p}\rangle$, para $|p\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger\,|0\rangle$.

e) Hasta ahora tenemos un campo cuántico que da lugar a estados de posición definida $|x\rangle = \psi^\dagger(x)\,|0\rangle$. Podemos entonces construir un estado arbitrario como una superposición de estos:

$$|\varphi\rangle = \int \mathrm{d}^4x\, \varphi(x)\,|x\rangle\,, \tag{21}$$

donde $\varphi(x)$ es lo que llamamos la función de onda de Schrödinger en la representación de posición. De hecho la probabilidad de encontrar al estado en la posición y es $|\langle y|\varphi\rangle|^2 = \left|\int \mathrm{d}^4x\, \varphi(x)\,\langle y|x\rangle\right|^2 = |\varphi(y)|^2$ como usualmente.
Muestre que

$$\vec{X}\,|\varphi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x}\, \varphi(x)\,|\vec{x}\rangle \tag{22}$$

$$\vec{P}\,|\varphi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \left(-i\,\vec{\nabla}\varphi(x)\right)|\vec{x}\rangle\,. \tag{23}$$

como usualmente ocurre en mecánica cuántica.

f) Por último, a partir del Hamiltoniano del sistema encuentre la evolución para $\varphi(x)$. Muestre que este cumple también la ecuación de Schrödinger, recuperando así la cuántica no-relativista usual que le enseñaron en su casa.