The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.

Sidney Coleman - 1975

1. Considere una cadena unidimensional de partículas de masa m equiespaciadas una distancia a con acoplamiento cuadrático a primeros vecinos $\frac{\kappa}{2}(q_{n+1}-q_n)^2$, donde q_n es el apartamiento de la posición de la n-ésima partícula respecto a la de equilibrio (na).

   a) Escriba el lagrangiano y el hamiltoniano del sistema. Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿Cuál sera la ecuación que corresponde al límite continuo (es decir cuando la diferencia entre vecinos $a \to 0$ y $n \to \infty$, de modo que na permanece constante*)? Muestre que la velocidad del sonido es en este caso $v = \sqrt{a^2\kappa/m}$.

   b) Volviendo al caso discreto, considerando condiciones de contornos periódicas, encuentre los modos normales $q_n(t) = \sum_n a_k(t)u_n^k$; encuentra la relación de dispersión $\omega_k(k,\kappa,a)$, el hamiltoniano y halle explícitamente la solución de los modos normales en función del tiempo.

   c) Calcule los corchetes de Poisson

$$\{b_k, b_{k'}\} = \{b_k^*, b_{k'}^\star\} = 0 \tag{1}$$

$$\{b_k, b_{k'}^\star\} = \frac{-i}{2m\omega_k}\delta_{kk'} \tag{2}$$

   d) Cuando uno considera el caso continuo, ¿cómo se generalizan las expresiones de los incisos anteriores? Quizás le sea más cómodo cambiar la notación, llamando al apartamiento de la posición de equilibrio de cada oscilador $q_n \to \phi(x)$, donde $x = na$ es la posición de dicho oscilador.

*Nota: A este límite de infinitos grados de libertad, continuo en el espacio, es a lo que llamamos *campo*.

2. Cuantifique el sistema anterior. Es decir, reemplace las variables de posiciones y momentos q_n y p_n por operadores $\hat{q}_n$ y $\hat{p}_n$ que satisfagan las reglas de conmutación usuales, expanda la solución en la base de modos normales, encuentre los operadores de creación y destrucción, ¿como son sus reglas de conmutación? Escriba en términos de ellos al operador hamiltoniano $\hat{H}$ y calcule su espectro (el conjunto de sus autovalores).

3. El teorema de la matemática alemana Amalie Emmy Noether, indica que por cada simetría del sistema, es decir una transformación infinitesimal en la que el lagrangiano cambia como una derivada total

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu, \tag{3}$$

existe una corriente j^μ que se conserva, es decir que $\partial_\mu j^\mu = 0$. Esta se puede escribir formalmente como

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - F^\mu. \tag{4}$$

Mas aún, podemos definir una cantidad a partir de j^μ que no varía en el tiempo:

$$Q = \int \mathrm{d}^3x j^0, \qquad \partial_t Q = 0, \tag{5}$$

a la cual se le suele llamar *carga* asociada a dicha simetría.

   a) Calcule las cuatro corrientes y cargas conservadas asociadas a las traslaciones espacio-temporales: $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ ($\mu = 0$ a 4). Identifique qué son esas cargas en términos del formalismo hamiltoniano (si lo ayuda particularizar, considere un sistema con finitos grados de libertad, o incluso uno solo).

   b) *(opcional)* Considere transformaciones infinitesimales de Lorentz, es decir $x^\mu \to x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$ con $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Muestre que la corriente conservada se puede escribir de la forma:

$$j^\mu = -\omega^\mu_\nu T^\mu_\rho x^\mu. \tag{6}$$

Considere ahora los 3 generadores de rotaciones espaciales ($\omega^{\mu\nu}$ tales que $\omega^{0\nu} = 0, \ \forall\nu$). Muestre que las cargas asociadas se pueden escribir como

$$Q_i = \epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^3x \, (x^j T^{0k} - x^k T^{0j}), \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{7}$$

donde ϵ es el tensor totalmente antisimetrico de Levi-Civita. Estas cargas representan las componentes del momento angular total del campo.

4. Sea el lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi \, \partial^\mu \psi^* - m^2 \psi \psi^*. \tag{8}$$

a) Halle la expresión del hamiltoniano y la ecuación de Klein-Gordon como la ecuación de movimiento de este campo.

b) Suponga $m = 0$ y $\psi^* = \psi$, y halle la corriente que se conserva debido a la simetría que posee el lagrangiano ante la transformación $\psi \to \psi + \alpha$ ($\alpha = cte$).

c) Halle la corriente y su respectiva carga que se conservan debido a la transformación de simetría $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ ($\alpha = cte$).

d) Utilizando el resultado del problema anterior, halle la expresión para la energía y el momento lineal total del campo.

5. Sea el siguiente lagrangiano (nótese que se trata diferente al tiempo que a las coordenadas espaciales, esto es porque se trata de un lagrangiano no relativista)

$$L(\psi, \nabla\psi, \partial_t\psi) = i\hbar\psi^\star \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar}{2m}\nabla\psi^\star \cdot \nabla\psi - V(\vec{x}, t)\psi^\star\psi \tag{9}$$

a) Calcule las ecuaciones de movimiento (le resultan familiares?), el hamiltoniano y los corchetes de Poisson entre los momentos conjugados π y los campos ψ:

$$\{\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\}, \ \{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)\}, \ \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\}$$

b) Sabiendo que la acción es invariante frente a las transformaciones

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{a} \tag{10}$$
$$t' = t + t_0, \tag{11}$$

donde R es una matriz ortogonal y $\vec{a}$ un vector constante, calcule las corrientes de Noether conservadas y halle las cargas que se conservan con cada corriente*. Para realizar este ítem suponga que ψ es invariante ante estas transformaciones, o sea que es un escalar (esto *no* es cierto para fermiones, pero simplifica bastante las cuentas). Una vez obtenido el resultado, discuta cualitativamente que pasaría si uno tuviese en cuenta también la transformación de los espinores ψ.

* Ayuda: si bien anticipamos que el sistema no respeta la simetría de Lorentz, analice si puede usar el resultado del problema 3.

c) La ecuación de movimiento de los campos ψ resulta idéntica a un caso que debería conocer (en orden para cursar esta materia). Discuta si este lagrangiano describe la misma física o no y porqué.

6. Simetrias de *gauge*:

a) Demuestre la invariancia del lagrangiano del problema anterior frente a una transformación global del grupo $U(1)$ definida de la siguiente manera

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \tag{12}$$

donde la palabra global significa que α no depende de las coordenadas espacio-temporales.

b) Asumiendo una modificación del lagrangiano dada por

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{13}$$

deducir la regla de transformación de la función A_μ para que el nuevo lagrangiano sea invariante ante la transformación $U(1)$ local (i.e. donde local significa que α es ahora una función de las coordenadas espacio-temporales). Esta modificación del lagrangiano es lo que se denomina *acople minimal*.

c) Verificar, luego, que esta transformación obtenida para el A_μ no afecta al término cinético $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ del campo de Maxwell (donde se asumió la identificación del campo A_μ como el campo electromagnético). (Recordatorio: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$).

7. Considere el lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar complejo (ver problema 4)

a) A través del acople minimal, obtenga el lagrangiano de éste campo escalar acoplado al campo electromagnético A_μ.

b) Muestre que la transformación local $U(1)$ sobre el campo escalar,

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x),$$

es parte de una transformación de simetría del lagrangiano (o sea, halle cómo debe transformar A_μ para que $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$), y halle la corriente conservada debido a esta simetría de gauge. ¿Hay dos corrientes conservadas diferentes para la simetría del lagrangiano con $\alpha = cte$ y con $\alpha = \alpha(x)$?

c) Halle la ecuación de movimiento para A_μ y muestre que las dos corrientes conservadas del item anterior son una misma. Dé una interpretación física para la carga que se conserva debido a esta simetría de gauge.

8. *(opcional)* Considere los cuatro lagrangianos siguientes

$$\begin{aligned}
L_I &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} && (14)\\
L_{II} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(A^\mu_{\ ,\mu})^2 && (15)\\
L_{III} &= -\frac{1}{2}A^\mu_{\ ,\nu}A_\mu^{\ ;\nu} && (16)\\
L_{IV} &= \frac{1}{2}\left[A_\mu F^{\mu\nu}_{\ ,\nu} - A_{\nu,\mu}F^{\mu\nu}\right] + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} && (17)
\end{aligned}$$

Calcule las ecuaciones de movimiento y las corrientes conservadas correspondientes a las invariancias frente a las transformaciones de Poincaré:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu + a^\mu \tag{18}$$

donde $\Lambda^{\mu\rho}\Lambda^{\nu\sigma}\eta_{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$y a^μes un 4-vector constante. Calcule también la corriente conservada correspondiente a las invariancia de gauge

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\xi.$$

En el caso de L_I, las variables son $A_\mu$pero está escritos de esta forma para poner de manifiesto su carácter de invariante de gauge. El segundo,L_{II}, (lagrangiano de Fermi) no es invariante de gauge pero no se necesita condiciones suplementarias para llegar a las ecuaciones de movimiento $\Box^2 A_\mu = 0$. El tercero L_{III}, difiere del segundo por un término de divergencia si $\partial_\mu A^\mu = 0$. Finalmente el último (lagrangiano de Schwinger) considera ambos A_μy $F^{\mu\nu}$como variables independientes.